



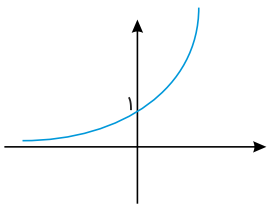
گزینه ۴

۱

نمودار تابع نمایی محور xها را قطع نمی‌کند. بنابراین هیچ تابع نمایی دارای برد صفر نخواهد بود.

$$D_f = \mathbb{R}, R_f = \mathbb{R}^+ : y > 0$$

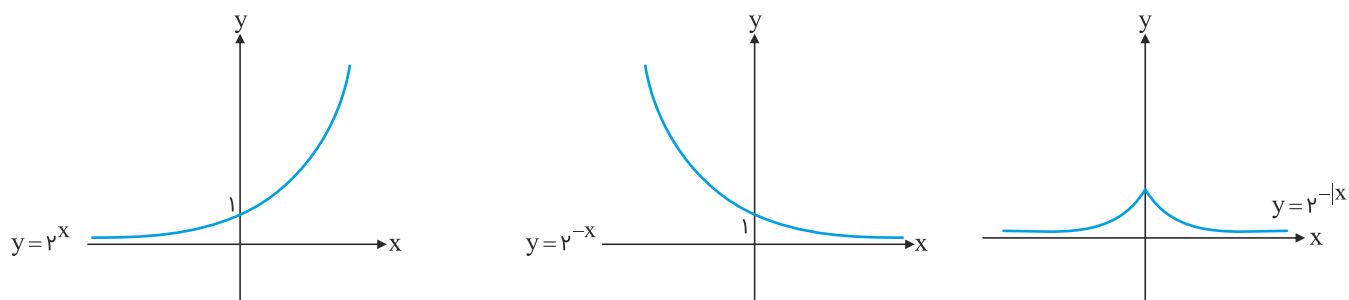
چون $\sqrt{3}$ عددی بزرگ‌تر از ۱ هست، در نتیجه نمودار حالت افزایشی دارد و به شکل زیر است:



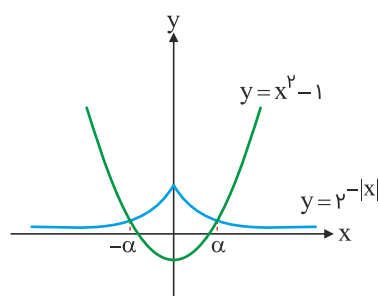
روش اول:

$$-2^{-|x|} = 1 - x^2 \Rightarrow 2^{-|x|} = x^2 - 1$$

با روش هندسی نمودار توابع $y = 2^{-|x|}$ و $y = x^2 - 1$ را رسم کرده و تعداد نقاط برخورد آن‌ها را بررسی می‌کنیم:



در شکل ملاحظه می‌شود دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه به طول‌های α و $-\alpha$ قطع می‌کنند بنابراین مجموع جواب‌ها برابر صفر است.



روش دوم:

در معادله $-2^{-|x|} = 1 - x^2$ با تبدیل x به $-x$ هیچ‌یک از طرفین تساوی تغییر نمی‌کنند یعنی توابع هر دو طرف تساوی نسبت به محور y متقارن‌اند (اصطلاحاً توابعی زوج هستند) بنابراین ریشه‌های معادله در صورت وجود دوبه‌دو قرینه‌اند و مجموع ریشه‌ها برابر صفر خواهد بود.

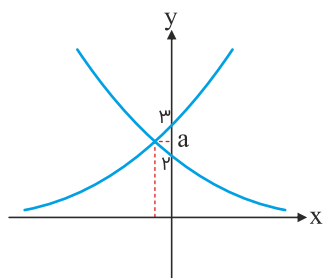
اگر بزرگی زلزله‌ای برابر با M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله برابر با E در واحد ارگ است:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

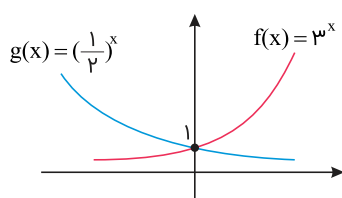
$$\begin{cases} \log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1 \\ \log E_2 = 11/8 + 1/5 (M_1 + 1) \end{cases} \Rightarrow \log E_2 - \log E_1 = 1/5$$

$$\Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1/5 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^{1/5} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10\sqrt{10}$$

اگر دو تابع $y = 3^{x+1}$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ را رسم کنیم، این توابع به ترتیب محور y ها را در ۳ و ۲ قطع می‌کنند به نمودار توجه کنید. عرض نقطه برخورد این دو تابع در محدوده $(2, 3)$ قرار دارد.

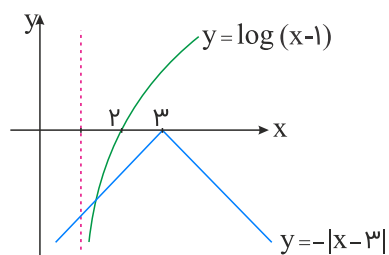


نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را رسم می‌کنیم:



باتوجه به نمودار رسم شده برد هر دو تابع $y > 0$ ، پس گزینه ۱ نادرست است. برای $x > 0$ تابع f افزایشی و تابع g کاهشی است. همچنین به ازای $x < 0$ نمودار تابع g بالاتر از نمودار تابع f قرار می‌گیرد، پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند. فقط گزینه ۲ صحیح است و دو نمودار یکدیگر را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کنند.

ابتدا معادله داده شده را به صورت $\log(x-1) = -|x-3|$ بازنویسی می‌کنیم. حال نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کرده تا تلاقی دو نمودار یا همان ریشه‌های معادله مشخص گردد. طبق شکل تنها یک نقطه تلاقی موجود است.



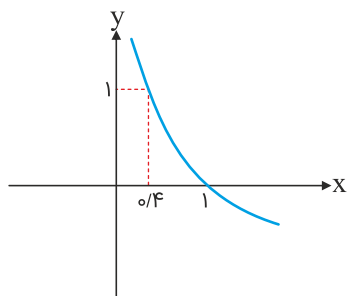
برای حل این گونه از تست‌ها رسم نمودار را توصیه می‌کنیم.
می‌دانیم:

$$a = \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{6}$$

$$\log_{\frac{5}{4}} 1 = 0, \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{4} = 1$$

$$0 < \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{6} < 1 \Rightarrow 0 < a < 1$$

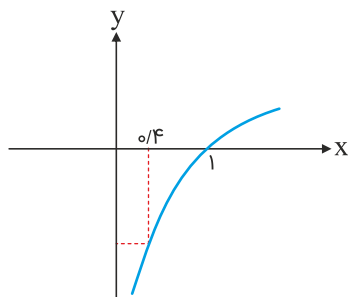
پس:



می‌دانیم:

$$b = \log_{\frac{5}{6}} \frac{5}{4}$$

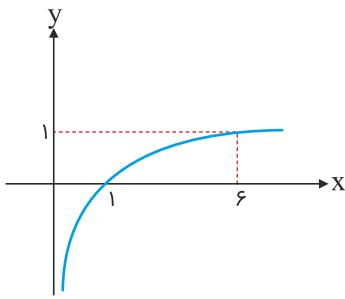
$$\log_{\frac{5}{6}} 1 = 0 \Rightarrow \log_{\frac{5}{6}} \frac{5}{4} < 0$$



می‌دانیم:

$$\log_{\frac{5}{6}} 1 = 0, \log_{\frac{5}{6}} \frac{5}{6} = 1$$

$$c = \log_{\frac{5}{6}} 17$$

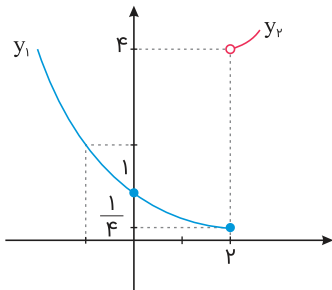


پس $\log_6 17 > 1$ است و در نتیجه $c > a > b$ خواهد بود.

گزینه ۳

۸

با رسم نمودارهای $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ به ازای $x \leq 2$ و همچنین $y_2 = 2^x$ به ازای $x > 2$ در یک دستگاه مختصات داریم:



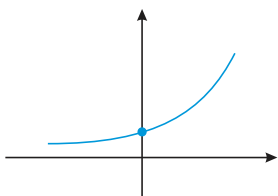
بنابراین برد تابع f به صورت $y \geq \frac{1}{4}$ است.

گزینه ۴

۹

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = (2^{-1})^{-x} = 2^x$$

نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

جرم توده باکتری پس از گذشت t ساعت را می‌توان از رابطه $f(t) = ۲۰۰\left(\frac{1}{۲}\right)^t$ محاسبه کرد، پس:

$$f(۱۰) = ۲۰۰\left(\frac{1}{۲}\right)^{۱۰}, \quad f(۵) = ۲۰۰\left(\frac{1}{۲}\right)^۵$$

$$\Rightarrow \frac{f(۱۰)}{f(۵)} = \frac{۲۰۰ \times \left(\frac{1}{۲}\right)^{۱۰}}{۲۰۰ \times \left(\frac{1}{۲}\right)^۵} = \left(\frac{1}{۲}\right)^۵ = \frac{1}{۳۲}$$

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $۰ < a < ۱$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود و برای x های کوچک‌تر از صفر با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد.

$$\begin{cases} f(۲) = ۰ \Rightarrow ۰ = a + \log_۲(۲ - b) \\ f(۵) = ۲ \Rightarrow ۲ = a + \log_۲(۵ - b) \end{cases} \Rightarrow ۲ = \log_۲(۵ - b) - \log_۲(۲ - b)$$

$$\Rightarrow \log_۲ \frac{۵ - b}{۲ - b} = ۲ \Rightarrow \frac{۵ - b}{۲ - b} = ۴ \Rightarrow ۵ - b = ۸ - ۴b \Rightarrow b = ۱$$

$$f(۲) = ۰ \Rightarrow ۰ = a + \log_۲(۲ - ۱) \Rightarrow ۰ = a + \log_۲ ۱$$

$$\Rightarrow a = ۰ \Rightarrow b - a = ۱ - ۰ = ۱$$

باتوجه به اطلاعات داده‌شده:

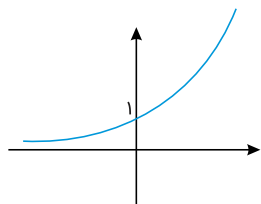
$$\log E_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

$$\log E_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵(M + ۲)$$

اگر طرفین دو رابطه اخیر را از هم کم کنیم، داریم:

$$\log E_۲ - \log E_۱ = ۳ \Rightarrow \log \frac{E_۲}{E_۱} = ۳ \Rightarrow \frac{E_۲}{E_۱} = ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$$

در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، نمودار حالت افزایشی دارد به این صورت که با زیاد شدن x ها، مقدار y ها نیز زیاد می‌شود؛ در نتیجه شکل نمودار به صورت زیر است:
فقط در گزینه "۳"، $a > 1$ است.



$$-x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{-x} \log(-x) \Rightarrow f(x) = -\log(-x)$$

